

Analytická geometrie (AG)

- zkoumá geometrické útvary pomocí algebraických a analytických metod

Je založena na vektorech a soustavě souřadnic, rozděluje se na AG v rovině a v prostoru.

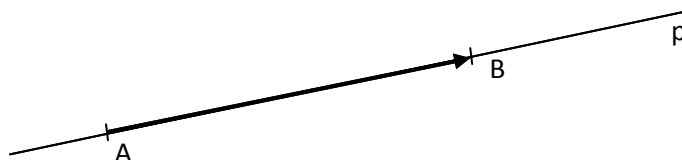
Analytická geometrie v rovině

Parametrická rovnice přímky

K vyjádření rovnice přímky potřebujeme jeden bod, který leží na přímce, a vektor, který určuje její směr ... směrový vektor. V praxi se užívají dva body, které leží na přímce. $A=[a_1, a_2]$, $B=[b_1, b_2]$

$$p: \mathbf{x} = \mathbf{a}_1 + (\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1) \cdot t$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{a}_2 + (\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2) \cdot t, \quad t \in \mathbb{R} \quad \mathbf{s}_1 = \mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1, \mathbf{s}_2 = \mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2, \text{směrový vektor přímky ... } \mathbf{s} = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$$



Představa – z bodu A se dostaneme do libovolného bodu přímky tak, že zkracujeme nebo natahujeme velikost směrového vektoru. K tomu slouží parametr t .

Obecná rovnice přímky

$p: ax + by + c = 0$, (a, b) ... normálový vektor ... vektor, který je kolmý na přímku p (na směrový vektor $(-b, a)$)

Př. Určete parametrickou a obecnou rovnici přímky, která prochází body $A=[1, -4]$ a $B=[-2, -1]$. Určete směrový a normálový vektor přímky.

$$p: \begin{aligned} x &= 1 + (-2 - 1)t \\ y &= -4 + (-1 - (-4))t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 1 - 3t \\ y &= -4 + 3t \end{aligned} \quad \mathbf{s} = (-3, 3)$$

obecnou rovnici získáme vyloučením parametru t ... každou rovnici vynásobíme tak, aby po sečtení parametr t vypadl. V našem příkladě to není třeba.

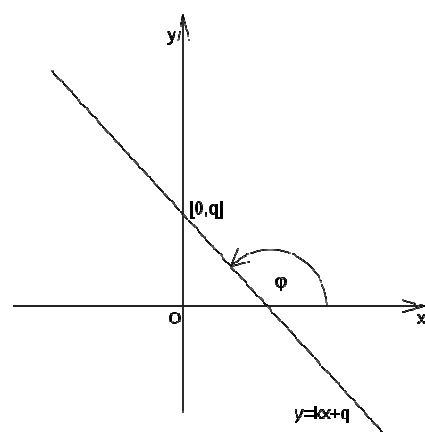
$$\begin{aligned} x + y &= -3 \\ x + y + 3 &= 0 \end{aligned} \quad \mathbf{n} = (1, 1)$$

Směrnice tvar přímky

Je-li v rovnici $p: ax + by + c = 0$, $b \neq 0$, pak ji lze upravit na tvar :

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}, \text{ jinak vyjádřeno:}$$

$p: y = kx + q$, $k, q \in \mathbb{R}$ $k = \tan \varphi$, φ ... úhel, který přímka svírá s kladným směrem osy x

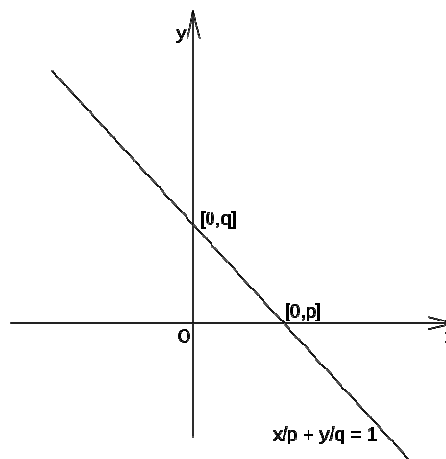


Úsekový tvar přímky p:

Známe-li úseky p, q, které vytíná přímka různoběžná se souřadnicovými osami na osách x a y, pak lze užít

úsekový tvar přímky

$$p: \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1, \quad p, q \neq 0$$



Příklady k procvičení

- Napište parametrické rovnice přímky, je-li dán její bod A a směrový vektor $\vec{s}$:
 - $A = [5, -6], \vec{s} = (3, 2)$
 - $A = [-1, -8], \vec{s} = (-3, 1)$
 - $A = [-4, 0], \vec{s} = (1, -\sqrt{2})$
 - $A = [0, 1], \vec{s} = (2, 0)$
- Určete směrový a normálový vektor přímky dané parametricky
 - $x = -3 + 2t$
 $y = 1 - 4t$
 - $x = 5 - t/3$
 $y = 2 + t$
 - $x = -\sqrt{2} - t$
 $y = 6 + t$
- Určete souřadnice alespoň dvou bodů, které leží na dané přímce, přímku načrtněte
 - $x = -5 + 2t$
 $y = -1 - 4t$
 - $x = 1 - t$
 $y = -1 + t$
 - $x = 5t$
 $y = -2 - t/2$
- Napište parametrické rovnice přímky, která prochází dvěma body:
 - $A = [2, 4], B = [4, 9]$
 - $M = [0, -4], N = [-2, 0]$
 - $T = [-2, 3], B = [-4, -9]$
- Přímka p je dána bodem $P = [3, -5]$ a směrovým vektorem $\vec{s} = (-4, 1)$.
 - Určete, zda body $A = [-5, -3], B = [2, -1]$ leží na dané přímce
 - Napište parametrické rovnice přímky m, která je rovnoběžná s přímkou p a prochází bodem $M = [-1, 6]$.
 - Napište parametrické rovnice přímky n, která prochází počátkem soustavy souřadnic a je kolmá k přímce p.

6. Bodem $M = [3, -5]$ ved'te přímku

- a) Rovnoběžnou s přímkou $p: x = 1 + 3t, y = 3 + 5t$
- b) Kolmou k přímce $r: x = -1 + 2t, y = 2 - 7t$

Uved'te parametrické rovnice hledaných přímek.

7. Přímka je dána obecnou rovnicí. Určete její normálový a směrový vektor

- a) $3x + 2y + 5 = 0$
- b) $x + 2y - 3 = 0$
- c) $-3x + y + 2 = 0$
- d) $5x + y/2 - 1 = 0$

8. Určete obecnou rovnici přímky p :

- a) $x = 3 - 4t$
 $y = 2 + 3t$
- b) $x = 2 + 7t$
 $y = -1 - 5t$
- c) $x = 5 + 4t$
 $y = 6 + 2t$
- d) $x = -3t$
 $y = 4 + 5t$

9. Napište obecnou rovnici přímky, která je dána bodem $M = [-4, 1]$ a směrovým vektorem $\vec{s} = (-2, 3)$.

10. Určete obecnou rovnici přímky, která je dána bodem a směrovým vektorem:

- a) $A = [7, -2], \vec{s} = (-1, 1)$
- b) $B = [-3, 1], \vec{s} = (5, -5)$
- c) $C = [0, 4], \vec{s} = (6, 7)$
- d) $D = [-10, 0], \vec{s} = (0, -4)$
- e) $E = [3, 1], \vec{s} = (2, 3)$
- f) $F = [1, 1], \vec{s} = (-6, 2)$

11. Je dána rovnice přímky $p: 3x - 4y + 6 = 0$

- a) Ověřte početně, zda body $M = [2, 3], N = [-3, 1]$ leží na dané přímce.
- b) Napište parametrické rovnice přímky p .

12. Určete parametrické rovnice přímky dané obecnou rovnicí:

- a) $x + y + 5 = 0$
- b) $x - y - 2 = 0$
- c) $2x - y + 4 = 0$
- d) $x + 4y = 0$
- e) $4x + 3y + 6 = 0$

13. Je dána přímka $p: 2x - 3y - 6 = 0$. Stanovte rovnici přímky

- a) m , která prochází bodem $M = [1, 2]$ a je rovnoběžná s přímkou p ,
- b) r , která prochází bodem $R = [-3, 4]$ a je kolmá k přímce p

[$m: 2x - 3y + 4 = 0$]

[$r: 3x + 2y + 1 = 0$]

14. Určete rovnici přímky m , která prochází daným bodem a je rovnoběžná s přímkou p :
- $p: x + 2y - 4 = 0, A=[2, -1], Aem$
 - $p: 3x - y - 2 = 0, B=[1, -4], Bem$
 - $p: -6x + 5y - 7 = 0, C=[0, 0], Cem$
15. Určete rovnici přímky r , která prochází daným bodem a je kolmá k přímce p :
- $p: 5x - 2y - 3 = 0, M=[1, 2], Mer$
 - $p: -x + 4y - 2 = 0, N=[0, 0], Ner$
 - $p: 2x + 7y = 0, P=[-1, -4], Per$
16. Rozhodněte, jsou-li dané přímky p a r rovnoběžné nebo kolmé
- $p: 4x - y + 11 = 0 \quad r: -x - 4y + 11 = 0$
 - $p: 2x + 3y - 4 = 0 \quad r: -x - \frac{3}{2}y + 2 = 0$
 - $p: -2x + 2y + 3 = 0 \quad r: x - y + 6 = 0$
17. Určete směrnice tvar rovnice přímky p , která prochází bodem
- $A=[-4, 2]$ a má směrnici $k = -\frac{3}{2}$.
 - $A=[2, -3], k = -4$
 - $A=[0, 5], k = 1$
 - $A=[-4, 0], k = -1$
18. Určete směrnice tvar přímky, která prochází dvěma body:
- $A=[-4, -2], B=[1, 3]$
 - $C=[0, 4], D=[5, 2]$
 - $E=[-7, 3], F=[-3, 6]$
 - $G=[10, -4], H=[4, 3]$
19. Parametrický tvar přímky p převedte na obecný a směrnice tvar
- $p: x=3 - 2t$
 $y=-1 + t$
 - $p: x=2 + 3t$
 $y=1 - t$
 - $p: x=-2 - 4t$
 $y=3t$
 - $p: x=-2 + 2t$
 $y=4 + t$
20. Určete směrnice tvar rovnice přímky, která prochází bodem L a je rovnoběžná s danou přímkou p :
- $L=[3, -4], p: y=x + 2$
 - $L=[-4, 7], p: y=-x - 5$
 - $L=[-2, -3], p: y=\frac{x}{4} + 1$
21. Napište směrnice tvar rovnice přímky, která prochází bodem T a je kolmá k přímce p :
- $T=[-4, 3], p: y=-4x + 2$
 - $T=[-8, 10], p: y=\frac{1}{2}x - 3$
 - $T=[6, 1], p: y=-0,6x - 4$
 - $T=[1, 1], p: y=-x - 6$

22. Určete vzdálenost rovnoběžek $p: 3x - 2y - 4 = 0$, $q: 3x - 2y + 2 = 0$

TEORIE: $M=[x_0, y_0]$, $p: ax + by + c = 0$, kde aspoň jeden z koeficientů a, b je různý od nuly,

vzdálenost bodu M od přímky p je: $v = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

23. Určete vzdálenosti daných bodů od přímky p :

- a) $A=[2,7]$, $B=[0,0]$, $p: 3x - 4y - 14 = 0$
- b) $A=[2, -3]$, $B=[-1,8]$, $p: 12x - 5y + 39 = 0$
- c) $M=[5,7]$, p prochází body $P=[-4,5]$, $Q=[11,-3]$
- d) $R=[1,-2]$, $p: x=-1 + 2t, y=3 - 5t$
- e) $K=[-3,-4]$, $p: y=2x - 1$

24. Určete vzdálenost rovnoběžek p, q

- a) $p: x + y + 6 = 0$ $q: x + y - 4 = 0$
- b) $p: y=-2x + 5$ $q: y=-2x - 1$

Odchylka dvou přímek je velikost ostrého nebo pravého úhlu, který přímky svírají. Určí se ze vztahu:

$$\cos \varphi = \frac{|u \cdot v|}{|u| \cdot |v|} \quad u, v \text{ jsou směrové nebo normálové vektory.}$$

25. Vypočtěte odchylku přímek p a q .

- a) $p: x=1 + t, y=-2 - t$ $q: y=3x - 1$
- b) $p: x + 3y - 6 = 0$ $q: -2x + y + 6 = 0$
- c) $p: 5x + y + 3 = 0$ $q: y=-5x + 2$
- d) $p: 3x - 2y + 4 = 0$ $q: -x + 5y = 0$

26. Určete vzájemnou polohu přímek p, q . U rovnoběžek určete vzdálenost, u různoběžek určete souřadnice jejich průsečíku a odchylku.

- a) $p: 3x - 4y + 5 = 0$ $q: 5x + 3y - 10 = 0$
- b) $p: 5x + 2y - 11 = 0$ $q: x=3 - 2t, y=-2 + 5t$
- c) $p: 2x - 5y + 2 = 0$ $q: 5x + 2y + 5 = 0$
- d) $p: 2x - 5y + 6 = 0$ $q: 8x + 15y + 10 = 0$